Amortissement d'une dette

Nathan Tillier
Pour émENSip'

15 November 2026
Version 1

Résumé

Correction de l'exercice 94 page 60, partie B.

Table des matières

1 Énoncé 2
2 Correction 3
3 À retenir 5

1 Énoncé

Pour financer l'achat d'une voiture, un couple emprunte un capital 20000€, avec des mensualités de remboursement constantes égales à 500€.
Sa banque lui propose un taux annuel d'emprunt de 3.84%, soit un taux mensuel de 0.32%. Chaque mois, la mensualité de 500€ se répartit entre des intérêts (0,32% du capital restant dû en début de mois) et un remboursement du capital.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n le capital restant dû à la fin du n-ième mois de remboursement du prêt et I_n les intérêts du n-ième mois de remboursement.
Ainsi, $C_0 = 20000$, $C_1 = 19564$, $I_0 = 0$ et $I_1 = 64$.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a

$$C_{n+1} = 1.0032 \times C_n - 500$$

2) a) Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = C_n - 156250$$

est géométrique. Préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

c) À l'aide de la calculatrice, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $C_n \leq 0$. Interpréter le résultat obtenu.

3) a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$I_n = 0.0032 \times C_{n-1}$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = 500 - 436 \times 1.0032^{n-1}$$

2 Correction

1) Chaque mois, le couple
   - perçoit des intérêts qui correspondent à 0,32% du capital en début de mois[1]
   - rembourse les mensualités de remboursement, égales à 500€

   Autrement dit,

nouveau capital = ancien capital + intérêts perçus − remboursement des mensualités

   Ce qui donne

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + \frac{32}{100} \times C_n - 500 \\ &= 1.0032 \times C_n - 500 \end{aligned}$$

2) a) La relation donnée dans la question est

$$u_n = C_n - 156250$$

   Au rang suivant[2], cela donne

$$u_{n+1} = C_{n+1} - 156250$$

   On injecte la formule de la question 1) dans l'expression de droite :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1.0032 \times C_n - 500) - 156250 \\ &= 1.0032 \times C_n - 156750 \end{aligned}$$

   On souhaite à présent montrer que (u_n) est géométrique[3], pour cela on va chercher à exprimer C_n en fonction de u_n.
   On remarque que C_n et u_n sont justement liés par la relation donné dans la question :

$$\begin{aligned} u_n &= C_n - 156250 \\ \text{d'où} \quad 156250 + u_n &= C_n \end{aligned}$$

   On reprend le raisonnement précédent, en remplaçant C_n par l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1.0032 \times C_n - 156750 \\ &= 1.0032 \times (156250 + u_n) - 156750 \\ &= 1.0032 \times u_n + 156750 - 156750 \\ &= 1.0032 \times u_n \end{aligned}$$

   Donc (u_n) est géométrique de raison 1.0032, c'est bien ce qu'on voulait montrer !

b) On sait, comme (u_n) est géométrique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1.0032^n \times u_0$$

   Puis on reprend la relation entre C_n et u_n obtenue avant, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

[1] C'est-à-dire du capital en fin du mois précédent

[2] C'est-à-dire en prenant $n+1$ à la place de n

[3] Donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

pour un certain q qui est alors la raison de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} C_n &= u_n + 156250 \\ &= 1.0032^n \times u_0 + 156250 \\ &= 1.0032^n \times (C_0 - 156250) + 156250 \\ &= 1.0032^n \times (20000 - 156250) + 156250 \\ &= -136250 \times 1.0032^n + 156250 \end{aligned}$$

c) Avec la calculatrice, en calculant C_n pour différentes valeurs de n on remarque que $C_{42} > 0$ et $C_{43} < 0$. La suite (C_n) étant décroissante[4] on en déduit que pour tout $n \geq 43$,

$$C_n \leq 0$$

On en déduit que le capital du couple sera négatif au bout de trois et demi : il n'aura plus assez d'argent pour rembourser le prêt.

[4] (u_n) est de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme strictement négatif (on calcule $u_0 < 0$) donc (u_n) est décroissante et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

or

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = u_n + 156250$$

donc (C_n) est également décroissante de même limite.

3) a) Les intérêts du n-ième mois représentent 0.32% du capital au début de ce mois, donc pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$I_n = 0.0032 \times C_{n-1}$$

b) On a établi dans la question 2.b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = -136250 \times 1.0032^n + 156250$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} I_n &= 0.0032 \times C_{n-1} \\ &= 0.0032 \times \left(-136250 \times 1.0032^{n-1} + 156250\right) \\ &= -436 \times 1.0032^{n-1} + 500 \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat attendu !

3 À retenir

Suite géométrique

- Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q et premier terme u_0 si elle commence au rang zéro et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut exprimer u_n en fonction de n par

$$u_n = q^n \times u_0$$

- Si $q \neq 1$, la somme des $k+1$ premiers termes de la suite (u_n) est donnée par la formule[5]

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

[5] C'est utile pour la question 4) qui termine l'exercice.